

سؤال احتمالی اول: انواع تابع با نمایش های مختلف

نوع ۱: مجموعه تابع و نمایش های مختلف آن

نوع ۲: تعیین ضابطه $f(x)$

سؤال احتمالی دوم: دامنه و برد تابع

نوع ۱: تعیین دامنه از روی ضابطه

نوع ۲: تعیین دامنه از روی نمودار

نوع ۳: $f(x)$ همان y است

نوع ۴: بُرد

سؤال احتمالی سوم: انواع تابع

نوع ۱: تابع خطی، تابع ثابت، تابع همسانی

نوع ۲: قدر مطلق و چند ضابطه ای

سؤال احتمالی چهارم: نمودار

نوع ۱: نمودار x ، $|x|$ ، $\sqrt{x}$ و انتقال آن: $f(x+c) \pm d$



سؤال احتمالی اول: انواع تابع با نمایش های مختلف

نوع ۱: مجموعه تابع و نمایش های مختلف آن

* به ازای هر ورودی (فقط یک خروجی داریم پس مؤلفه ی اول تکراری نداریم.

مؤلفه ی اول

* نمایش های مختلف

الف) زوج مرتب: رابطهای که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه های اول یک نباشد.

$(1, 2), (2, 2)$ ✓ $(2, 4), (1, 2)$ ✓ $(1, 2), (1, 1)$ ✗ $(1, 2), (1, 3)$ ✗

مثال) رابطهای $\{ (m, 2), (m+2, 3), (m, 4), (2, m), (-2, m), (3, m^2), (m^2, 3) \}$

به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟ (کنند ۱۵)

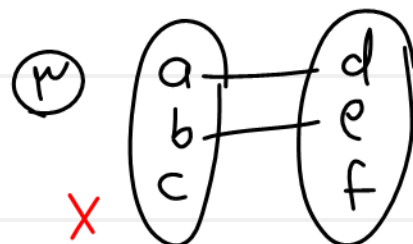
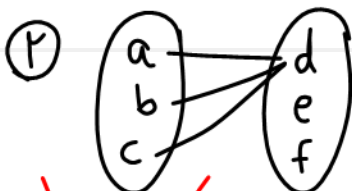
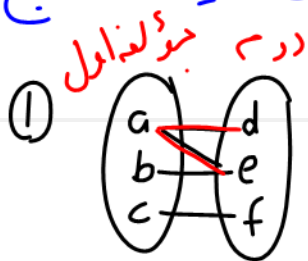
$(1, -2)$ ✓ $(2, -1)$ ✓ $(3, -1)$ ✗ $(4, -1)$ ✗ هیچ مقدار m

$$m^2 = m + 2$$

$$\begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ (m-2)(m+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

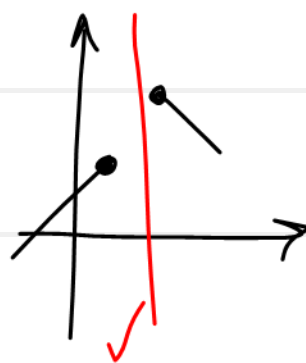
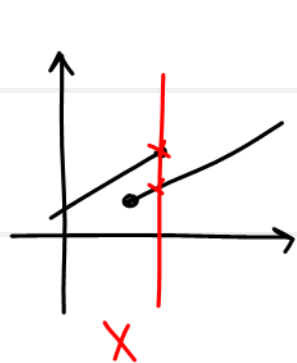


ب) نمودار دهن: از هیچ یک از اعضای مجموعه مبدأ نباید بیش از یک فلش خارج شود



* حتماً از تمام اعضای مؤلفی اول باید فلش خارج شود اما نباید به تمام اعضای مؤلفی دوم فلش وارد شود.

ج) نمایش نموداری: هر خط عمود بر محور x ها، نمودار را بیش از یک نقطه قطع نکند.



د) نمایش صباطی تابع: به x مقدار بده ← بیش از یک y دارد ← تابع نیست

مثال) کدام یک از روابط زیر بیانگر تابع است؟

$y: x+2$ ✅

$|y| = |x| + 3$ ❌

$y^2 = \sqrt{x} + 6$ ❌

$y^2 = x^2 + 1$ ❌

$x=0 \rightarrow y: 2$
 $y: -2$

$x=0 \rightarrow y: +2$
 $y: -2$

$x=0 \rightarrow y: +1$
 $y: -1$



مثال) رابطه $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2 \}$

چند زوج مرتب دارم؟ (گفتار)

۶ (۲)
۷ (۴)

۲ (۱)
۱ (۳)

$x=2 \rightarrow y=0 \rightarrow (2, 0)$

$1 + |y| = 2$

$x=1 \rightarrow y=+1 \rightarrow (1, 1)$

$x=1 \rightarrow y=-1 \rightarrow (1, -1)$

$|y| = 1$

$x=0 \rightarrow y=2 \rightarrow (0, 2)$

$x=0 \rightarrow y=-2 \rightarrow (0, -2)$

$x=-1 \rightarrow y=+1 \rightarrow (-1, 1)$

$x=-1 \rightarrow y=-1 \rightarrow (-1, -1)$

$x=-2 \rightarrow y=0 \rightarrow (-2, 0)$

$x=-2 \rightarrow y=0$

۱۲



تعیین ضابطی $f(x)$ ← حالت اول: $f(x) = x^2 + x + 1$ ✓

$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$?

$f(0) = \sqrt{x}$ ← حالت دوم: x از حد 0 بزرگتر است

$f(x) = ?$

$x = 1 \rightarrow f(1) = 1$ این اولین جای x جواب باید باشد 1

مثال اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آن گاه $f(1)$ کدام است؟ (کنکور)

۵ (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ✓ ۸ (۴)

مثال اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطی تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$

کدام است؟ $\frac{x-1}{x^2-1}$ ✗ $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۳) ✓ $\frac{2x}{x^2-1}$ ✗ $\frac{1}{1-x^2}$ ✗

(۱۰/۱) $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{1}$

$x=0 \rightarrow f(0) = 0$

$f(0) - 2f(0) + 1 = 1$

$x=2 \rightarrow f(2) = 2$

$\frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2 - 1} : \frac{-2x-1}{x^2-1} : \frac{(2x+1)}{-x^2+1}$ $f(2) - 2f(2) + 1 = -2 - 2 + 1 = -3$



مثال) اگر $f(x^2 - 1) = 2x$ باشد، آن گاه منبسطی

$x=0$ $f(-1) = 0$

$1+x^2$ (۲)

تابع $f(x) = ?$ کدام است؟ (۱) $\sqrt{1+x}$

$f(-1) = 0$

$1+2x$ (۴)

$2-x^2$ (۳)

مثال) اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد، منبسطی $f(x) = ?$ کدام است؟
 $f(2) = 2$

$x^2 + 2x$ (۴)

$x^2 - 2x$ (۳)

$\frac{1}{x^2}$ (۲)

x^2 (۱)

$x + \frac{1}{x} = t$ $f(t) = t^2 - 2t$

$f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

① $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

② $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x + \frac{1}{x})$

مثال) اگر $f(x-1) = x^2 - 3x^2 + 2x + 2$ باشد، حاصل $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

کدام است؟

۱۶ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۴ (۱)

$f(x-1) = x^2 - 3x^2 + 2x + 2$

$f(x-1) = (x-1)^2 + 4$

$f(t) = t^2 + 4 \rightarrow f(\sqrt{2}) = 2 + 4 = 6$

$x-1 = t$



سؤال احتمال دوم: دامنه و برد تابع

نکته ۱: تعیین دامنه از روی صابط

تعریف: مقادیر مجاز x (ورودی ها) که با ازای آن از تابع y (خروجی) گوییم



دامنه

۱) خروجی گیر منفی: میانه دامنه توابع گویا:

$\{R - \text{ارته های خروجی}\}$

دقت! ساده نکن:

$$\frac{x}{x} \rightarrow D: R - \{0\} / \frac{x}{x} = 1 \rightarrow \text{غلط}$$

۲) زیر را یکال فرض زوج منفی: میانه دامنه توابع

رایکالی با فرض زوج:

$$\sqrt[n]{0} \Rightarrow D: 0 \geq 0$$

$$\frac{0}{\sqrt[n]{0}} \Rightarrow D: 0 > 0$$

مثال) $y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow D_y = ? \quad R - \{1\}$
 $x=1$



(مثال ۲) $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{2, 3\}$
 $(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

(مثال ۳) $y = \frac{x^5}{x^2 - 4} \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
 $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

(مثال ۴) $y = \frac{x+5}{x^2 + 4} \Rightarrow D_y = \mathbb{R}$
 $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \rightarrow \text{نمی باشد}$

(مثال ۱) $y = \sqrt{x} \Rightarrow D_y: x \geq 0$

(مثال ۲) $y = \sqrt{x-5} \Rightarrow D_y: x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

(مثال ۳) $y = \sqrt{-x} \Rightarrow D_y: -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0$

{ (مثال ۴) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}} \Rightarrow D_y: \frac{x-2}{x-5} \geq 0$ $\frac{+}{-} \frac{-}{+}$ $\begin{cases} x > 5 \\ \cup \\ x \leq 2 \end{cases}$

(مثال ۵) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-5}} \Rightarrow D_y: \begin{cases} x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \\ x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \end{cases} \cap \rightarrow \boxed{x \geq 5}$



مثال) اگر عبارت $\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{4}} + \sqrt{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x

در کدام بازه است؟ (نکته، ۹۶)

$\left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$ (۴) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, 2\right]$ (۳) $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (۲) $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ (۱)

(۱۵/۱)

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{4} \geq 0$$

(۲۰/۱)

$$\frac{2}{x^2} \geq \frac{9}{4} \rightarrow \frac{x^2}{2} \leq \frac{4}{9} \rightarrow x^2 \leq \frac{8}{9} \xrightarrow{\substack{2 \leq x \\ -2 \leq x}} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \quad \text{--- (۲۰/۱)}$$

مثال) دامنه تابع باضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 14}$ بصورت $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$

ریشه های زوج

$$x^2 + ax + b$$

است a و b حقیقی است؟
-۸، -۲

$$1(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$$

اگر α, β ریشه های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد،

نکته

۹



نَیَب ۲: تَعَسِیَن دامنَه از روی نمودار

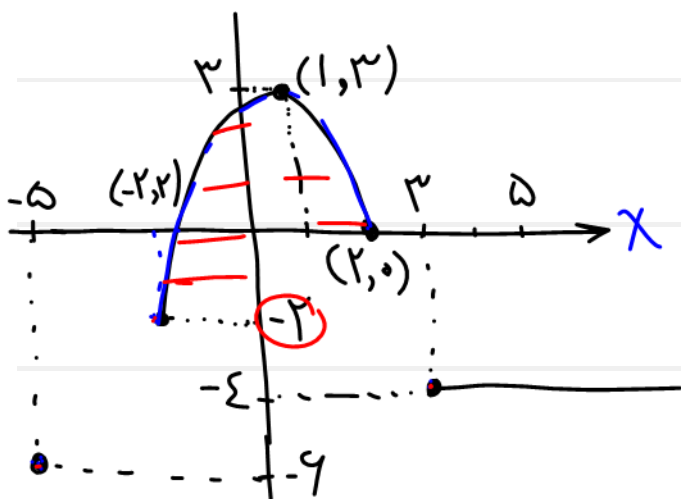
تصویر نمودار را بنده از روی محور x ← دامنَه

تصویر نمودار را بنده از روی محور y ← بُرد

مثال) دامنَه و بُرد را در اشکال زیر مشخص کنید

دامنَه: $(-\infty, -2] \cup [-2, 2] \cup [2, +\infty)$

بُرد: $\{-2\} \cup [-2, 2] \cup [2, +\infty)$



مثال) اگر دامنَه تابع $f(x) = x^2 + 3$ بازه‌ی $[-2, 2]$ باشد،

بر د آن بصورت $[a, b]$ می باشد، $b^2 - a^2$ کدام است؟

$$49 - 9 = 40$$

۴۰ (۴)

۹۸ (۳)

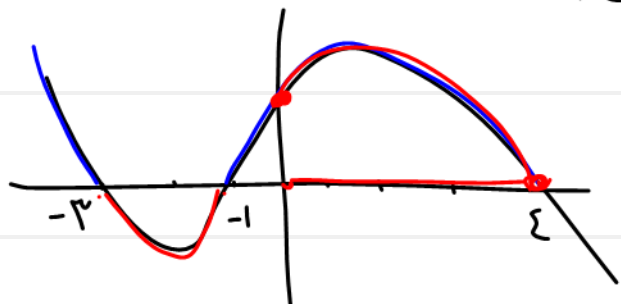
۲ صفر

۴۹ (۱)



نَیپ ۳: $f(x)$ همان ی است.

مثال) نمودار $f(x)$ داده شده است:



① دامنه $f(x)$ = ? $\mathbb{R}$

② دامنه $\sqrt{f(x)}$ = ? $(-\infty, -3] \cup [-1, 4]$
 $f(x) \geq 0$

③ دامنه $\sqrt{x f(x)}$ = ?

$x f(x) \geq 0$
+ +
- -
 $[0, 4] \cup [-3, -1]$

④ دامنه $\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ = ? $\frac{x}{f(x)} \geq 0$
- +
+ -
 $[0, 4) \cup (-3, -1)$

⑤ دامنه $\sqrt{x f(x-1)}$ = ?

$x f(x-1) \geq 0$
+ +
- -

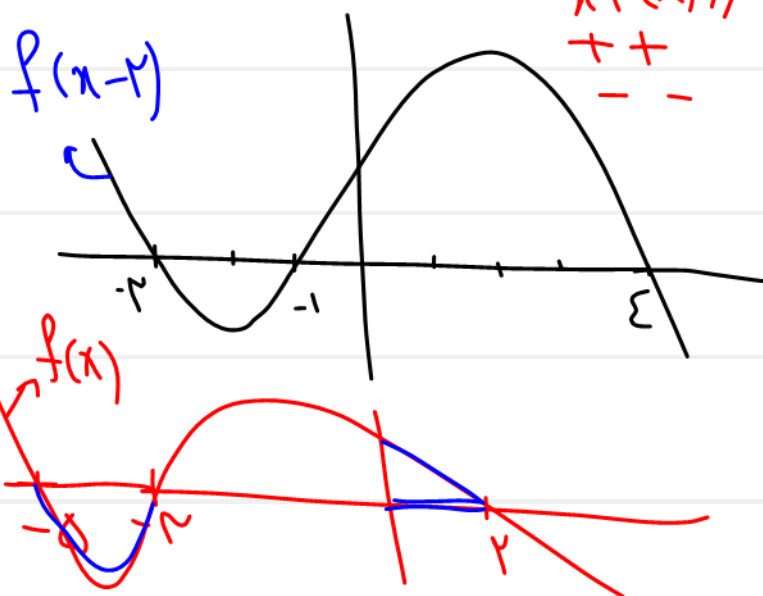
$[1, 4] \cup [-1, 0]$



مثال) شکل روبرو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است.

دامنهٔ تابع باضابطی $\sqrt{x}f(x)$ ، کدام است؟

$xf(x) \geq 0$
++
--



1 ~~$[-1, 1] \cup [0, 6]$~~

2 $[-3, 1] \cup [0, 2]$

3 ~~$[-5, -3] \cup [-1, 2]$~~

4 $[-5, -3] \cup [0, 2]$

نیم ۴: بُرد

2×1

مثال) بُرد تابع باضابطی $f(x) = (x+|x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ ، کدام است؟

1 ~~$(0, 1]$~~ 2 $[0, 4]$ 3 $[1, 2]$ 4 ~~$(1, 2)$~~

$x=1 \rightarrow f(1) = 2$

$x=2 \rightarrow \Sigma x = 0$



مثال) $y = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x+10}{x}, x, y \in \mathbb{N} \right\}$ چند عضو دارد؟

۱ (۴

۲ (۳

۳ (۲

۴ (۱ ✓

$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow y: 11 \\ x=2 &\rightarrow y: 6 \end{aligned}$$

$$\frac{x+10}{x} = 1 \rightarrow x+10 = x \quad 0 \neq -1$$

$$x=10$$

$$\begin{aligned} x=5 &\rightarrow y=2 \\ x=10 &\rightarrow y=2 \end{aligned}$$

سؤال احتمال سوم: انواع تابع

تابع همنانی

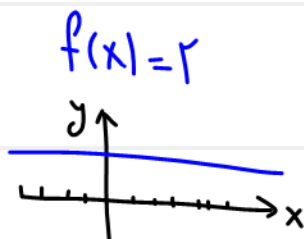
$$f(x) = x$$



(بنیاد ربع اول در سوم)

تابع ثابت

$$f(x) = k$$



(۱, ۲) (۲, ۲) (۳, ۲)

تابع خطی

$$f(x) = ax + b$$



مثال) اگر $f(x) = -3$ و تابع $g(x)$ ها باشد، حاصل

کدام است؟

$$\frac{2f(-1) + g(2)}{2f(0) - g(1)}$$

✓ ۱/۰۴ (۴)

۱/۰۳ (۳)

۱/۰۲ (۲)

۱/۰۱ (۱)

$$\frac{-6 + 2}{-9 - 9} = \frac{-4}{-18} = 1/0.45$$

مثال) اگر f تابعی خطی باشد، از نقاط $(1, -1)$ و $(2, 2)$

بگذرد، کدام تابع هائی است؟

~~$f(x) + 2$~~ (۴)
 ~~$3x$~~

$f(x) - 2x + 2$ (۳)
 x

~~$-f(x) + x$~~ (۲)
 ~~$-2x + 2 + x$~~

~~$f(x) - 3x$~~ (۱)
 ~~$3x - 2$~~

(x_1, y_1)

(x_2, y_2)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{2 - (-1)}{2 - 1}(x - 1)$$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$y + 1 = 3x - 2 - 1$

$y = 3x - 2$

$f(x) = 3x - 2$



تایپ ۲: تابع فیض بای

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+2} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$$

مثال) در تابع باضای بای

مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟ (کنند، ۹۵)

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

رسم تابع فیض بای: از نقاط شروع کن!

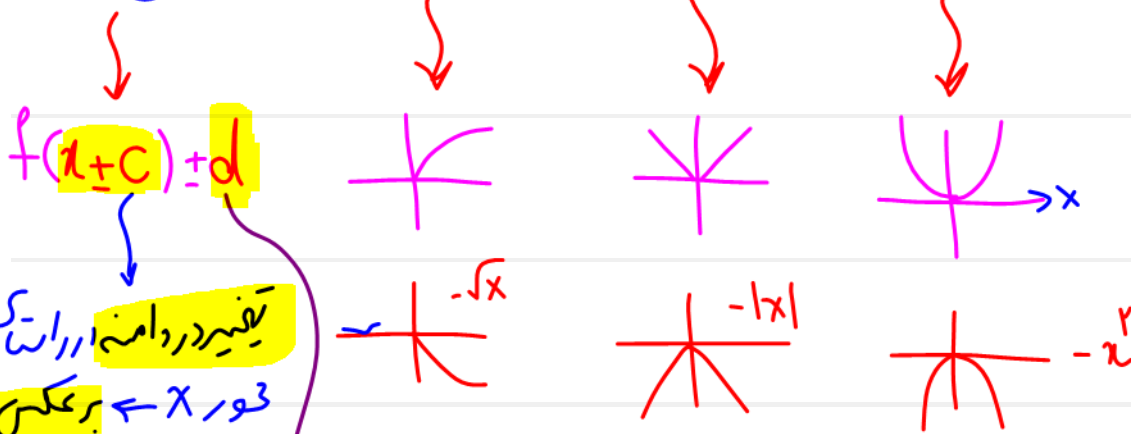
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} & x > 1 \\ x+1 & x < 1 \end{cases}$$

(۱, ۴)

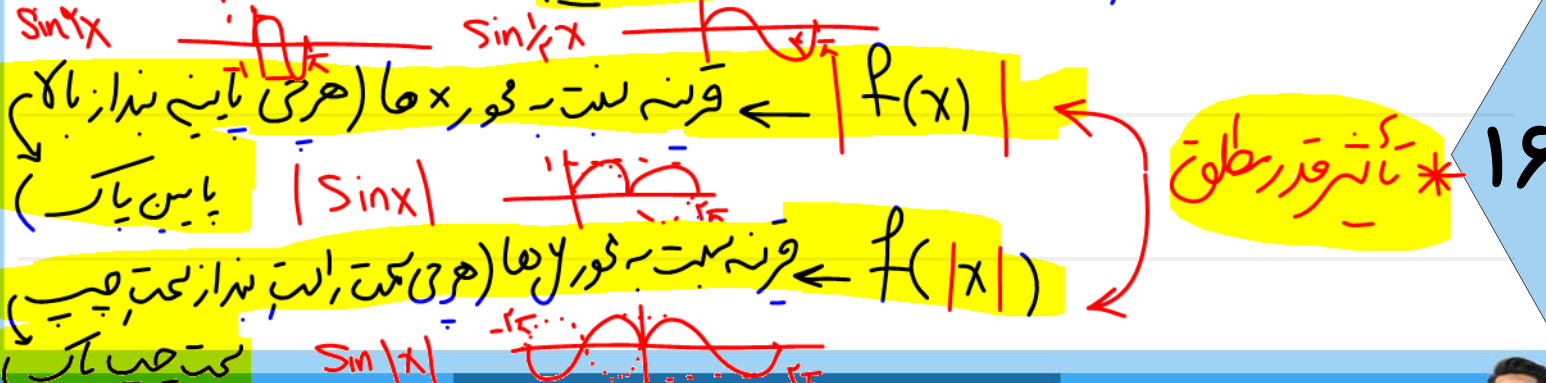
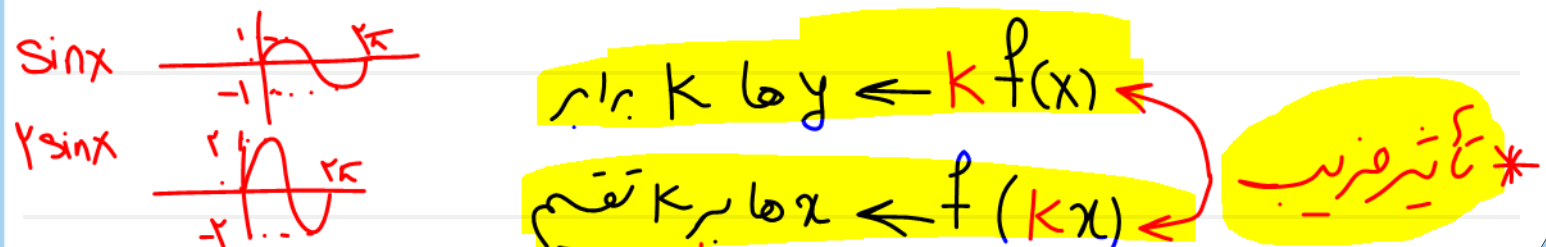
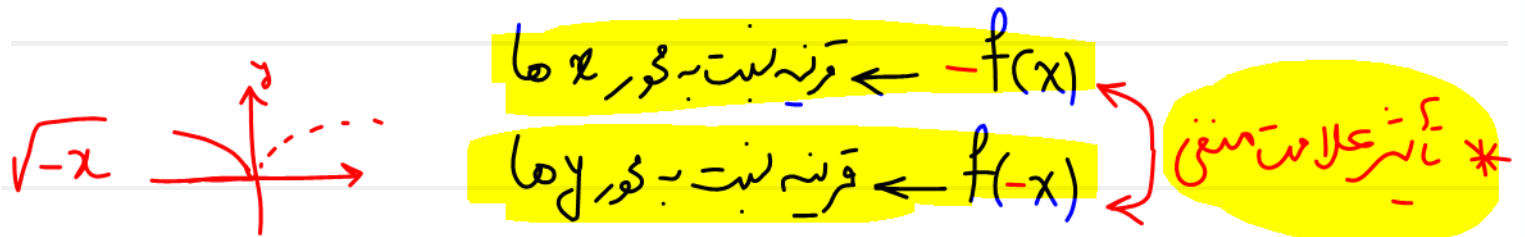


سؤال احتمالاً چهارم: کمندار

نَیَب: نمودار x^2 ، $|x|$ ، $\sqrt{x}$ و انتقال آنها

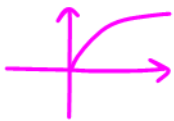


تغییر در دامنه، راستی
 محور x ← برعکس
 تغییر در دامنه، در راستی
 محور y ← درستی



تایید شده

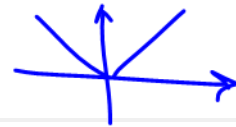
$$\sqrt{x}$$



$$x^2$$



$$|x|$$



$$\sqrt{x+1}$$



$$(x-1)^2$$



$$|x+2|$$



$$\sqrt{x-1}$$



$$-(x+3)^2$$



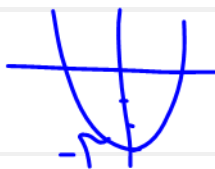
$$|x-2|$$



$$\sqrt{x+1}$$



$$x^2-3$$



$$|x|-2$$



$$\sqrt{x}-1$$



$$-x^2+2$$



$$|x|+2$$



$$\sqrt{x+2}-1$$



$$(x-1)^2+1$$



$$|x-2|+2$$



مثال) قرینه بخردار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها

اسم کرده، سپس ۱ واحد بطرف x های مثبت انتقال میدهم

مخودار حاصل نیازناحیهی اول و سوم را با کدام طول قطع کند؟ (کنکور ۹۷)

~~۱(ع)~~

۱(۳)

~~۱(۵)~~

~~۱(۲)~~

$$\sqrt{-(x-2)} = x$$

مثال) مخودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۱ واحد بطرف x ها منفی،

سپس ۱ واحد بطرف y های منفی انتقال میدهم. مخودار جدید، در کدام بازه،

زیر محور x حالت؟ $(-5, 2)$ ✓ $(-5, 3)$ ✗ $(-2, 3)$ ✗ $(-2, 5)$ ✗

$$f(x) \xrightarrow{1 \text{ واحد } x \text{ و } 1 \text{ واحد } y \text{ منفی}} f(x+2) \xrightarrow{1 \text{ واحد } y \text{ منفی}} f(x+2) - 9 < 0$$

$$(x+2)^2 - (x+2) - 9 < 0$$

$$t^2 - t - 12 < 0$$

$$(t-4)(t+3) < 0$$

$$x+2 = t$$

$$-3 < x+2 < 5$$

$$-5 < x < 3$$

$$-2 < t < 5$$



مثال) نمودار تابع باضابطه $f(x): x^2 - 2x$ ($x > 1$) مفروض است.

قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را، 16 واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال دهید. فاصله نقطه برخوردی حاصل با نمودار تابع f ، از چه اشیات کدام است؟

$2\sqrt{5}$ (ع) $5\sqrt{2}$ (ب) $6\sqrt{2}$ (د) $5\sqrt{5}$ (ا) ✓

$$-f(x) + 16 \Rightarrow -(x^2 - 2x) + 16 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x = t \Rightarrow -t + 16 = t \rightarrow 16 = 2t \rightarrow t = 8$$

$$x^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

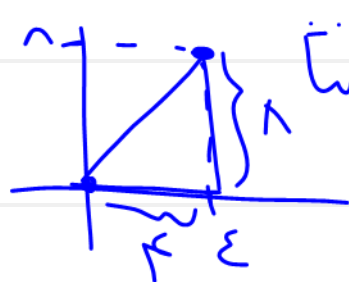
$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

خارج



$$(4, 8), (0, 0)$$

$$y = 8$$



$$\text{فاصله} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$



